

# Méthode topologique d'estimation de phase pour fonctions périodiques reparamétrisées.

---

Thomas Bonis, Frédéric Chazal, Bertrand Michel et Wojciech Reise

30 août 2022,

Rencontres Mathématiques-Mécanique,

CFM'22

The logo for Inria, featuring the word "Inria" in a stylized, cursive red font.

*TopAI chair*

*ANR-19-CHIA-0001*



Les systèmes de positionnement avancés combinent <sup>[1][2]</sup> plusieurs sources de données (signal GPS, capteurs inertiels), afin de fournir une estimation de la position ou de la vitesse qui soit plus robuste.

Le champ magnétique mesuré dans un véhicule en mouvement est le champ magnétique terrestre, perturbé par des quantités

+ liées au mouvement du véhicule

- le cap,
- rotation des roues,
- tours moteur,

- et celles qui en sont indépendantes

- autres véhicules,
- installations haute tension,
- infrastructure.

---

[1] Valérie Renaudin, Muhammad Afzal, and Gérard Lachapelle (Sept. 2012). "Magnetic Perturbations Detection and Heading Estimation Using Magnetometers". In: *Journal of Location Based Services* 6, pp. 161–185. DOI: 10.1080/17489725.2012.698109

[2] David Caruso et al. (Dec. 2017). "A Robust Indoor/Outdoor Navigation Filter Fusing Data from Vision and Magneto-Inertial Measurement Unit". In: *Sensors* 17.12, p. 2795. ISSN: 1424-8220. DOI: 10.3390/s17122795

Les systèmes de positionnement avancés combinent <sup>[1][2]</sup> plusieurs sources de données (signal GPS, capteurs inertiels), afin de fournir une estimation de la position ou de la vitesse qui soit plus robuste.

Le champ magnétique mesuré dans un véhicule en mouvement est le champ magnétique terrestre, perturbé par des quantités

+ liées au mouvement du véhicule

- le cap,
- **rotation des roues**,
- tours moteur,

- et celles qui en sont indépendantes

- autres véhicules,
- installations haute tension,
- infrastructure.

---

[1] Valérie Renaudin, Muhammad Afzal, and Gérard Lachapelle (Sept. 2012). "Magnetic Perturbations Detection and Heading Estimation Using Magnetometers". In: *Journal of Location Based Services* 6, pp. 161–185. DOI: 10.1080/17489725.2012.698109

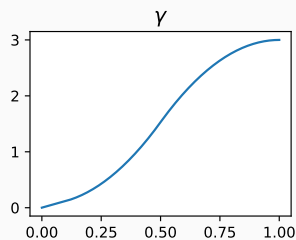
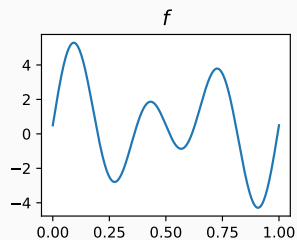
[2] David Caruso et al. (Dec. 2017). "A Robust Indoor/Outdoor Navigation Filter Fusing Data from Vision and Magneto-Inertial Measurement Unit". In: *Sensors* 17.12, p. 2795. ISSN: 1424-8220. DOI: 10.3390/s17122795

Soient

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et 1-périodique,
- $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, M]$  une bijection croissante, pour un  $M \in \mathbb{N}$ ,
- $W : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une perturbation continue.

## Problème

Supposons  $f$ ,  $\gamma$  et  $W$  inconnus. Étant donné  $S(t) = (f \circ \gamma)(t) + W(t)$ , on souhaite retrouver  $\gamma$ .

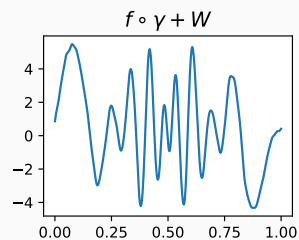
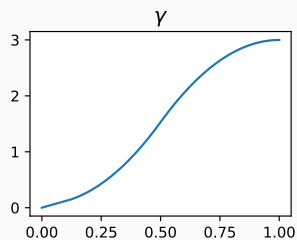
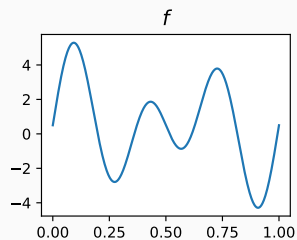


Soient

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et 1-périodique,
- $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, M]$  une bijection croissante, pour un  $M \in \mathbb{N}$ ,
- $W : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une perturbation continue.

## Problème

Supposons  $f$ ,  $\gamma$  et  $W$  inconnus. Étant donné  $S(t) = (f \circ \gamma)(t) + W(t)$ , on souhaite retrouver  $\gamma$ .

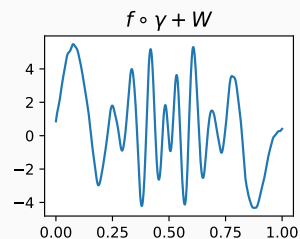
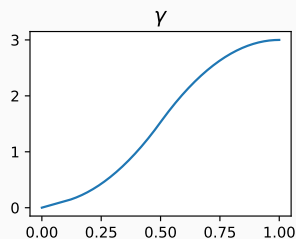
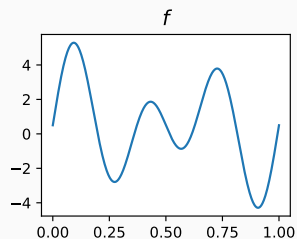


Soient

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et 1-périodique,
- $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, M]$  une bijection croissante, pour un  $M \in \mathbb{N}$ ,
- $W : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une perturbation continue.

## Problème

Supposons  $f$ ,  $\gamma$  et  $W$  inconnus. Étant donné  $S(t) = (f \circ \gamma)(t) + W(t)$ , on souhaite retrouver  $\gamma$ .



## Approche

On caractérise  $f$  via un **descripteur**, invariant par reparamétrisation  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Ensuite, on va

1. estimer  $N$ ,
2. en déduire une segmentation du signal.

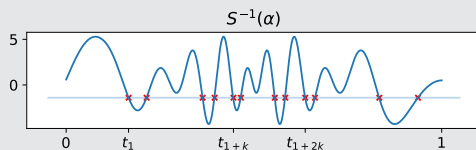
## Example: Pré-image d'un niveau

Le cardinal de la pré-image de  $y = \alpha$  par  $f$ ,  $|(f \circ \gamma)^{-1}(\alpha)|$ , est invariant par reparamétrisation.

### Estimation de $N$

Si on connaît  $k = \left| f|_{[0,1]}^{-1}(\alpha) \right|$ , on peut définir un estimateur de  $N$

$$N_\alpha(S) = \frac{|S^{-1}(\alpha)|}{k}. \quad (1)$$



[3] Boualem Boashash, Peter O'Shea, and Morgan Arnold (Nov. 1990). "Algorithms for instantaneous frequency estimation: a comparative study". In: *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering* 1348. DOI: 10.1117/12.23471

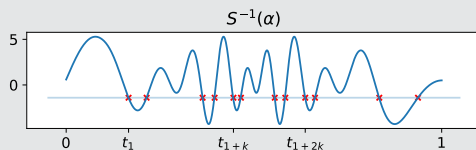
## Exemple: Pré-image d'un niveau

Le cardinal de la pré-image de  $y = \alpha$  par  $f$ ,  $|(f \circ \gamma)^{-1}(\alpha)|$ , est invariant par reparamétrisation.

### Estimation de $N$

Si on connaît  $k = |f|_{[0,1]}^{-1}(\alpha)|$ , on peut définir un estimateur de  $N$

$$N_\alpha(S) = \frac{|S^{-1}(\alpha)|}{k}. \quad (1)$$



### Segmentation du signal

Si  $S^{-1}(\alpha) = \{t_1, \dots, t_{Nk}\}$ ,  $t_1 < \dots < t_{Nk}$ , alors  $\gamma(t_{i+k}) - \gamma(t_i) = 1$ , et donc  $(t_{(n-1)k+j})_{n=1}^N$  est une segmentation de  $[t_j, t_{(N-1)k+j}]$  en périodes de  $f$ , pour tout  $1 \leq j \leq k$ . On obtient donc

$$\hat{\gamma}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{t_{(n-1)k+k} \leq t}.$$

- +  $N_\alpha$  est invariant par reparamétrisation:  $|(f \circ \gamma_1)^{-1}(\alpha)| = |(f \circ \gamma_2)^{-1}(\alpha)|$ , pour tout  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ ,
- $k$  est inconnu,
- $N_\alpha$  est sensible aux points critiques proches de  $\alpha$ : pas stable.

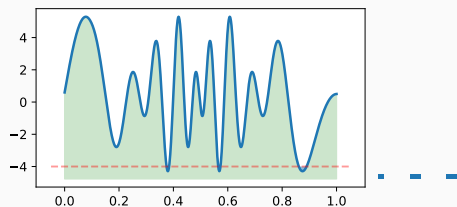
Pour des modèles spécifiques où  $k = 2$ ,  $N_0$  est l'estimateur de *zero-crossing*<sup>[3]</sup>.

[3] Boualem Boashash, Peter O'Shea, and Morgan Arnold (Nov. 1990). "Algorithms for instantaneous frequency estimation: a comparative study". In: *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering* 1348. DOI: 10.1117/12.23471



## Diagramme de persistance d'une fonction univariée

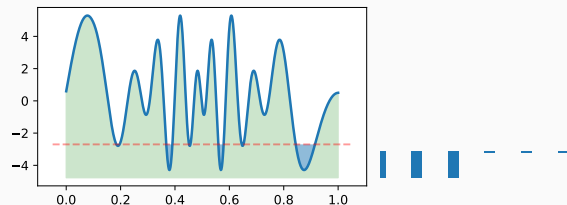
Le diagramme de persistance  $D(h)$  des sous-niveaux d'une fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(h^{-1}(-\infty, r])_{r \in \mathbb{R}}$ , est un multi-ensemble de points, qui synthétise l'ordre et la hauteur des extrema locaux de  $h$ .<sup>[4]</sup>



[4] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863>

## Diagramme de persistence d'une fonction univariée

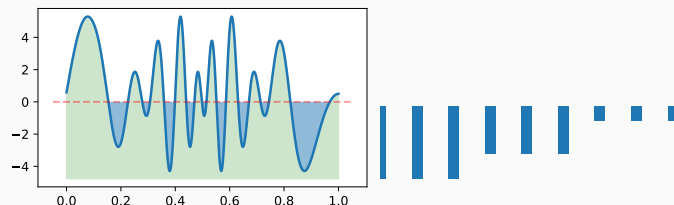
Le diagramme de persistence  $D(h)$  des sous-niveaux d'une fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(h^{-1}(-\infty, r])_{r \in \mathbb{R}}$ , est un multi-ensemble de points, qui synthétise l'ordre et la hauteur des extrema locaux de  $h$ .<sup>[4]</sup>



[4] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863>

## Diagramme de persistence d'une fonction univariée

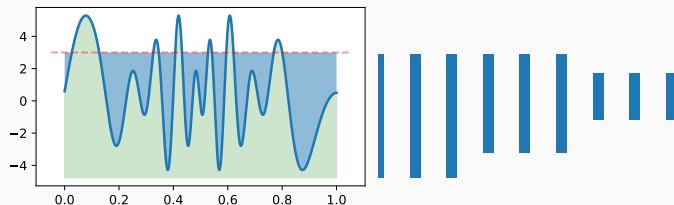
Le diagramme de persistence  $D(h)$  des sous-niveaux d'une fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(h^{-1}(-\infty, r])_{r \in \mathbb{R}}$ , est un multi-ensemble de points, qui synthétise l'ordre et la hauteur des extrema locaux de  $h$ .<sup>[4]</sup>



[4] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863>

## Diagramme de persistance d'une fonction univariée

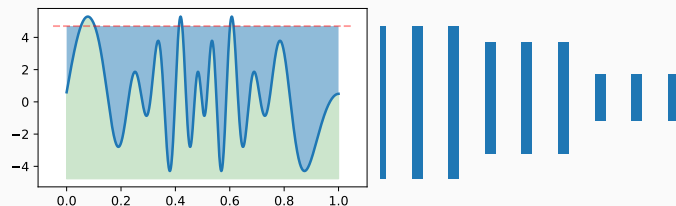
Le diagramme de persistance  $D(h)$  des sous-niveaux d'une fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(h^{-1}(-\infty, r])_{r \in \mathbb{R}}$ , est un multi-ensemble de points, qui synthétise l'ordre et la hauteur des extrema locaux de  $h$ .<sup>[4]</sup>



[4] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863>

## Diagramme de persistance d'une fonction univariée

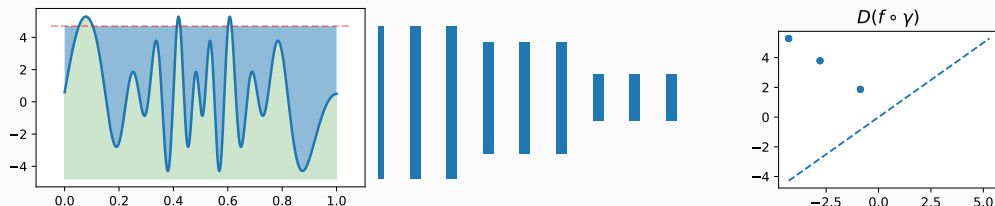
Le diagramme de persistance  $D(h)$  des sous-niveaux d'une fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(h^{-1}(-\infty, r])_{r \in \mathbb{R}}$ , est un multi-ensemble de points, qui synthétise l'ordre et la hauteur des extrema locaux de  $h$ .<sup>[4]</sup>



[4] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863>

## Diagramme de persistance d'une fonction univariée

Le diagramme de persistance  $D(h)$  des sous-niveaux d'une fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(h^{-1}(] - \infty, r])\right)_{r \in \mathbb{R}}$ , est un multi-ensemble de points, qui synthétise l'ordre et la hauteur des extrema locaux de  $h$ .<sup>[4]</sup>



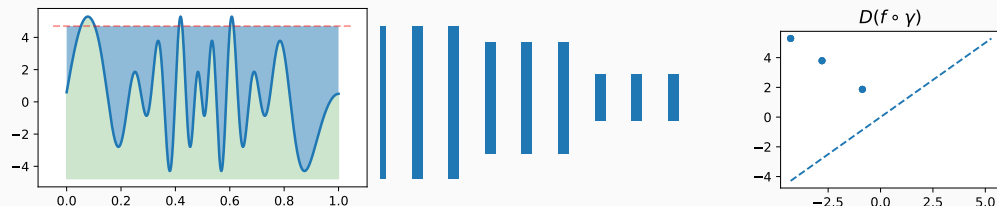
On peut voir  $D(h)$  comme une mesure de comptage sur  $\Delta_+ = \{(x, y) \mid x < y\} \subset \mathbb{R}^2$ . Pour  $A \subset \Delta_+$ ,

$$D(h)(A) = |D(h) \cap A|. \quad (2)$$

[4] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863>

## Diagramme de persistance d'une fonction univariée

Le diagramme de persistance  $D(h)$  des sous-niveaux d'une fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(h^{-1}(-\infty, r])_{r \in \mathbb{R}}$ , est un multi-ensemble de points, qui synthétise l'ordre et la hauteur des extrema locaux de  $h$ .<sup>[4]</sup>



On peut voir  $D(h)$  comme une mesure de comptage sur  $\Delta_+ = \{(x, y) \mid x < y\} \subset \mathbb{R}^2$ . Pour  $A \subset \Delta_+$ ,

$$D(h)(A) = |D(h) \cap A|. \quad (2)$$

### Proposition (Invariance par reparamétrisation)

Pour toute bijection croissante  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, N]$ ,

$$D(f \circ \gamma) = D(f|_{[0, N]}). \quad (3)$$

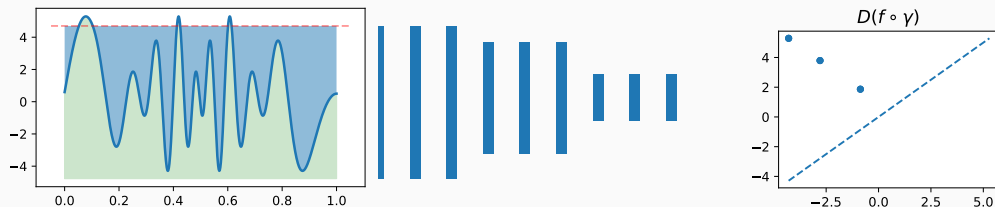
De plus, en identifiant les bords de  $[0, 1]$ , on obtient

$$D(f|_{[0, N]}) = N \times D(f|_{[0, 1]}). \quad (4)$$

[4] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863>

# Diagramme de persistance d'une fonction univariée

Le diagramme de persistance  $D(h)$  des sous-niveaux d'une fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(h^{-1}(-\infty, r])_{r \in \mathbb{R}}$ , est un multi-ensemble de points, qui synthétise l'ordre et la hauteur des extrema locaux de  $h$ .<sup>[4]</sup>



On peut voir  $D(h)$  comme une mesure de comptage sur  $\Delta_+ = \{(x, y) \mid x < y\} \subset \mathbb{R}^2$ . Pour  $A \subset \Delta_+$ ,

$$D(h)(A) = |D(h) \cap A|. \quad (2)$$

## Proposition (Invariance par reparamétrisation)

Pour toute bijection croissante  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, N]$ ,

$$D(f \circ \gamma) = D(f|_{[0, N]}). \quad (3)$$

De plus, en identifiant les bords de  $[0, 1]$ , on obtient

$$D(f|_{[0, N]}) = N \times D(f|_{[0, 1]}). \quad \text{“}N = \frac{D(f|_{[0, N]})}{D(f|_{[0, 1]})}\text{”} \quad (4)$$

[4] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863>



On définit  $\hat{N}(h) = \gcd\{|D(h) \cap p| \mid p \in D(h)\}$ , où  $\gcd$  est le plus grand diviseur commun.

## Corollaire

$$\hat{N}(f|_{[0,M]}) = N \times \hat{N}(f|_{[0,1]}) \quad (5)$$

## Définition

On dit que  $f$  est **non-dégénérée**, si  $\hat{N}(f|_{[0,1]}) = 1$ .

## Condition suffisante

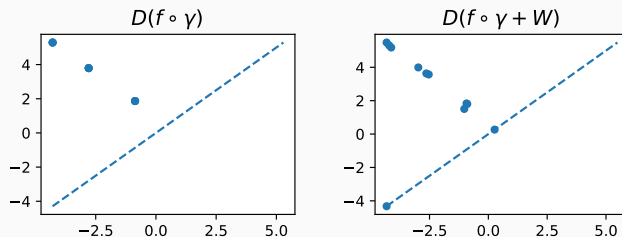
Si  $f|_{[0,1]}$  a un extremum dont la valeur est unique, alors  $f$  est **non-dégénérée**.

Le diagramme de persistance est stable par perturbations.<sup>[5]</sup>

## Proposition

Soit  $W : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors,

$$d_B(D(f \circ \gamma), D(f \circ \gamma + W)) \leq \|W\|_\infty. \quad (6)$$



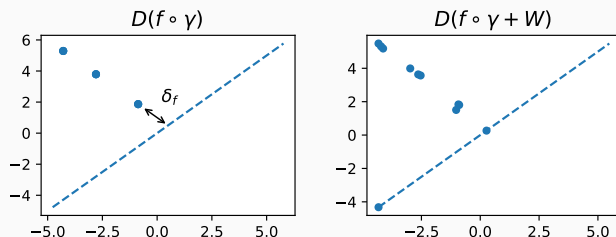
[5] Frederic Chazal et al. (July 2012). *The structure and stability of persistence modules*. en. SpringerBriefs in Mathematics. arXiv: 1207.3674. Springer, Cham. ISBN: 978-3-319-42545-0. URL: <http://arxiv.org/abs/1207.3674>

Le diagramme de persistance est stable par perturbations.<sup>[5]</sup>

## Proposition

Soit  $W : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors,

$$d_B(D(f \circ \gamma), D(f \circ \gamma + W)) \leq \|W\|_\infty. \quad (6)$$

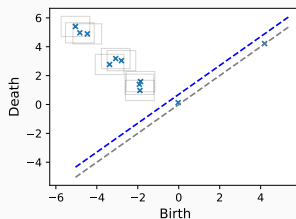


Le paramètre de régularité  $\delta_f = \min_{p,q \in D(f)} \{d(p, q), d(p, \Delta), d(q, \Delta)\}$  quantifie les distances entre les points, ainsi qu'à la diagonale.

[5] Frederic Chazal et al. (July 2012). *The structure and stability of persistence modules*. en. SpringerBriefs in Mathematics. arXiv: 1207.3674. Springer, Cham. ISBN: 978-3-319-42545-0. URL: <http://arxiv.org/abs/1207.3674>

En présence du bruit, on remplace les multiplicités des points par les mesures de certains voisinages.  
 Pour  $\tau > 0$ , on note  $\mathcal{A}_\tau$  une partition de  $D(S)$  obtenue avec du single-linkage clustering à l'échelle  $\tau$ .  
 On définit

$$\hat{N}(S, \tau) = \gcd_{A \in \mathcal{A}_\tau | A \cap \Delta_\tau = \emptyset} \{D(S)(A)\}. \quad (7)$$



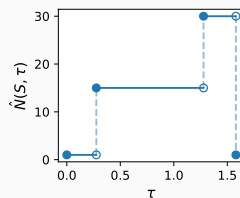
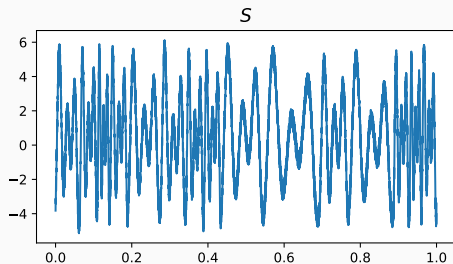
## Théorème

Supposons  $f$  non-dégénérée. Soit  $W$  une perturbation continue, telle que  $\|W\|_\infty < \epsilon$ . Alors, pour tout  $\tau \in ]2\epsilon, \delta_f/3[$ ,

$$\hat{N}(S, \tau) = N. \quad (8)$$

La fonction  $\tau \mapsto \hat{N}(S, \tau)$  est constante par morceaux. On prend  $\tau^*$  le milieu du s gment le plus long,    $\hat{N}(S, \cdot)$  est constante et différente de 1:

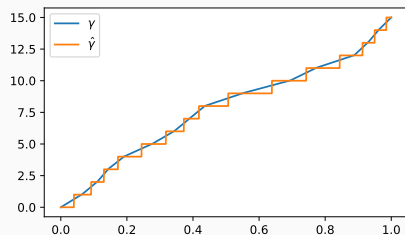
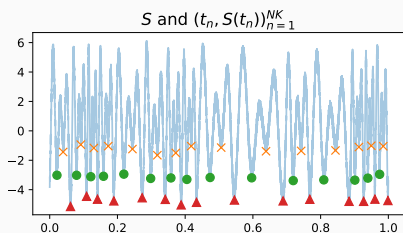
$$\hat{N}_\tau(S) = \hat{N}(S, \tau^*). \quad (9)$$



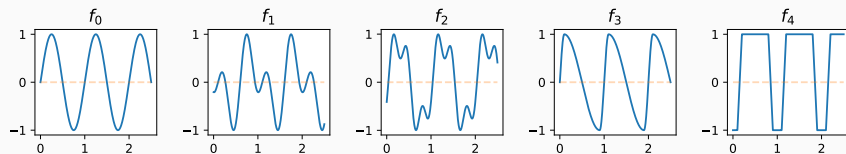
On considère  $\hat{C}_{\tau^*} = \{\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_{NK}\}$ , les minimas locaux associés aux points de  $D(S) \setminus \Delta_{\tau^*}$ .

Alors, pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,

$$\hat{\gamma}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{\hat{t}_{(n-1)K+k} \leq t} \quad \text{est un estimateur de } \gamma. \quad (10)$$



On considère 5 fonctions périodiques.

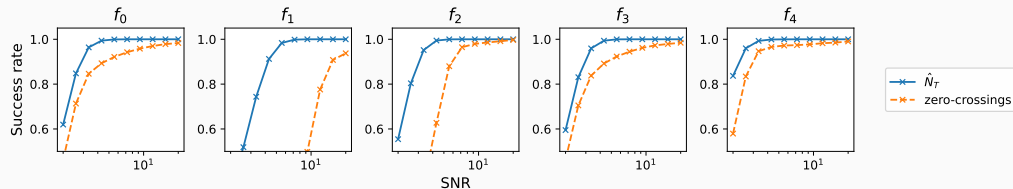


Pour obtenir  $S = f_k \circ \gamma + W$ , on génère  $\gamma$  et  $W$  aléatoires:

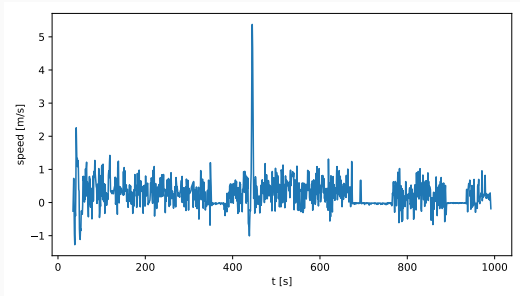
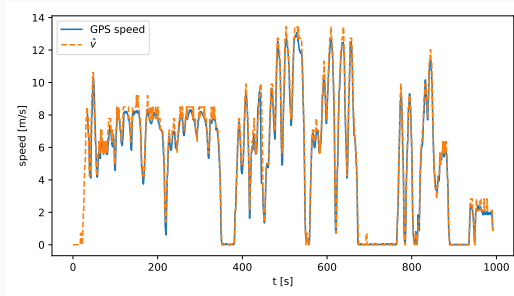
- On tire  $N \in \mathcal{U}(5, 50)$  et on choisit  $(t_l)_{l=1}^{N-1}$  pour les débuts des périodes. On interpole pour obtenir  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, N]$ .
- $W$  est un processus Gaussien avec moyenne 0 et covariance  $\Gamma(t) = \sigma^2 \exp(-t^2/(2l^2))$ .

Pour chaque  $(\gamma, \sigma, l)$ , on simule 50 réalisations indépendantes de  $W$ .

On compare la méthode  $\hat{N}_T$  avec  $\hat{N}_\alpha$  (zero-crossings avec  $k$  spécifié).



Dans des conditions réelles de trafic, en filtrant les points de  $D(S) \cap \Delta_r$ , on obtient une estimation de vitesse comparable à celle du GPS.





### Limitations

Les limitations principales viennent de l'estimateur  $\hat{N}_T$

1. Le gcd n'est pas stable par rapport aux petites perturbations,
2. La méthode ne s'applique qu'à  $\gamma(1) = N \in \mathbb{N}$ ,

### Perspectives

1. Intégrer les algorithmes de gcd approximatif.
2. Obtenir des garanties pour  $\hat{N}_T$ .

Les travaux présentés sont détaillés sur arxiv<sup>[6]</sup> et le code disponible<sup>[7]</sup>.







---

[6] (Thomas Bonis et al. [May 2022]. *Topological phase estimation method for reparameterized periodic functions*. DOI: 10.48550/arXiv.2205.14390. URL: <http://arxiv.org/abs/2205.14390>)

[7] [https://github.com/wreise/topological\\_phase\\_estimation](https://github.com/wreise/topological_phase_estimation)

## References

---

-  Boashash, Boualem, Peter O'Shea, and Morgan Arnold (Nov. 1990). "Algorithms for instantaneous frequency estimation: a comparative study". In: *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering* 1348. DOI: 10.1117/12.23471.
-  Boissonnat, Jean-Daniel, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863>.
-  Bonis, Thomas et al. (May 2022). *Topological phase estimation method for reparameterized periodic functions*. DOI: 10.48550/arXiv.2205.14390. URL: <http://arxiv.org/abs/2205.14390>.
-  Caruso, David et al. (Dec. 2017). "A Robust Indoor/Outdoor Navigation Filter Fusing Data from Vision and Magneto-Inertial Measurement Unit". In: *Sensors* 17.12, p. 2795. ISSN: 1424-8220. DOI: 10.3390/s17122795.
-  Chazal, Frédéric et al. (July 2012). *The structure and stability of persistence modules*. en. SpringerBriefs in Mathematics. arXiv: 1207.3674. Springer, Cham. ISBN: 978-3-319-42545-0. URL: <http://arxiv.org/abs/1207.3674>.
-  Renaudin, Valérie, Muhammad Afzal, and Gérard Lachapelle (Sept. 2012). "Magnetic Perturbations Detection and Heading Estimation Using Magnetometers". In: *Journal of Location Based Services* 6, pp. 161–185. DOI: 10.1080/17489725.2012.698109.