

# Méthode topologique de comptage de périodes pour fonctions périodiques reparamétrisées.

Thomas Bonis, Frédéric Chazal, Bertrand Michel et Wojciech Reise

16 juin 2022,  
JDS'22

The Inria logo is written in a stylized, cursive red font.

TopAI chair  
ANR-19-CHIA-0001

The logo for University Paris-Saclay, featuring the text "université PARIS-SACLAY" in a dark red font with a small red dot above the "é".The logo for Institut DataIA, featuring the text "INSTITUT DATAIA" in blue and pink, with a decorative graphic of colored triangles above the "IA". Below the text is the tagline "Science des données, Intelligence & Société".

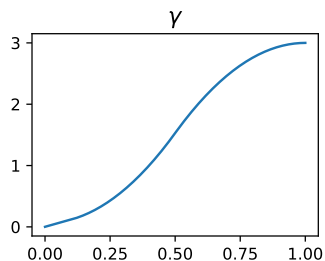
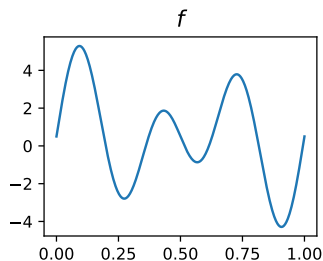
## Estimation du nombre de périodes

Soient

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et 1-périodique,
- $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, N]$  une bijection croissante, pour un  $N \in \mathbb{N}$ ,
- $W : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une perturbation continue.

### Problème

Supposons  $f$ ,  $\gamma$  et  $W$  inconnus. Étant donné  $S(t) = (f \circ \gamma)(t) + W(t)$ , on souhaite retrouver  $N$ .



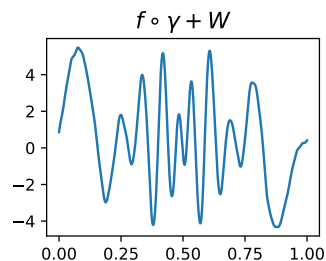
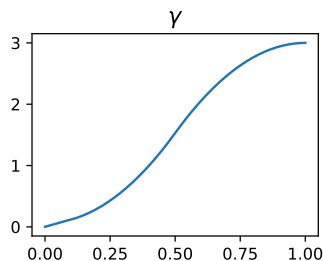
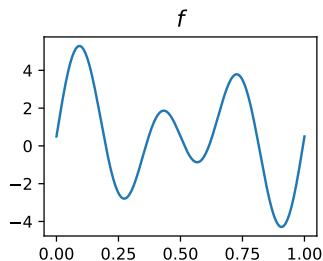
## Estimation du nombre de périodes

Soient

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et 1-périodique,
- $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, N]$  une bijection croissante, pour un  $N \in \mathbb{N}$ ,
- $W : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une perturbation continue.

### Problème

Supposons  $f$ ,  $\gamma$  et  $W$  inconnus. Étant donné  $S(t) = (f \circ \gamma)(t) + W(t)$ , on souhaite retrouver  $N$ .



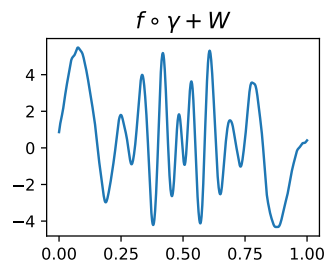
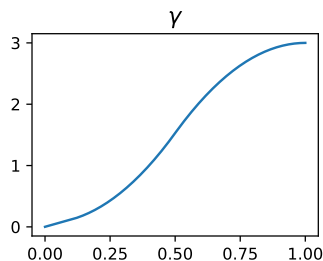
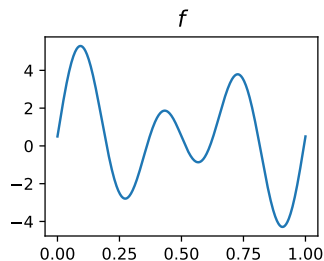
## Estimation du nombre de périodes

Soient

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et 1-périodique,
- $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, N]$  une bijection croissante, pour un  $N \in \mathbb{N}$ ,
- $W : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une perturbation continue.

### Problème

Supposons  $f$ ,  $\gamma$  et  $W$  inconnus. Étant donné  $S(t) = (f \circ \gamma)(t) + W(t)$ , on souhaite retrouver  $N$ .



### Approche

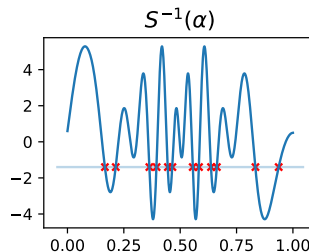
On caractérise  $f$  via un **descripteur**, invariant par reparamétrisation, qu'on utilise pour construire un **estimateur de  $\hat{N}$** . On évalue sa stabilité par rapport au bruit additif.

## Exemple: Pré-image d'un niveau

Un descripteur de  $f$  invariant par reparamétrisation est le cardinal de la pré-image de  $y = \alpha$  par  $f$ :  $|(f \circ \gamma)^{-1}(\alpha)|$ .

Si on connaît  $k = |f|_{[0,1]}^{-1}(\alpha)$ , on peut définir un estimateur de  $N$

$$N_\alpha(S) = \frac{|S^{-1}(\alpha)|}{k}. \quad (1)$$



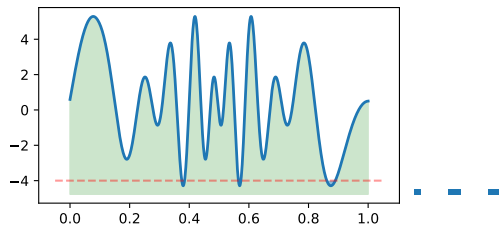
- +  $N_\alpha$  est invariant par reparamétrisation:  $|(f \circ \gamma_1)^{-1}(\alpha)| = |(f \circ \gamma_2)^{-1}(\alpha)|$ , pour tout  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ ,
- $k$  est inconnu,
- $N_\alpha$  est sensible aux points critiques proches de  $\alpha$ .

Pour des modèles spécifiques où  $k = 2$ ,  $N_0$  est l'estimateur de *zero-crossing*<sup>[1]</sup>.

[1] Boualem Boashash, Peter O'Shea, and Morgan Arnold (Nov. 1990). "Algorithms for instantaneous frequency estimation: a comparative study". In: *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering* 1348. DOI: 10.1117/12.23471

## Diagramme de persistence d'une fonction univariée

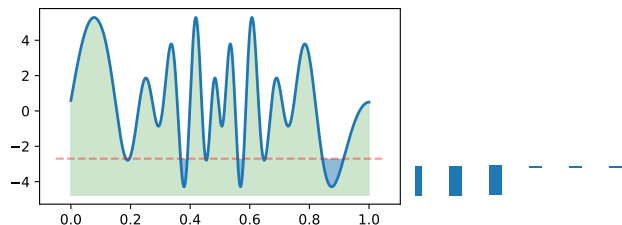
Le diagramme de persistence  $D(h)$  d'une fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est un multi-ensemble de points, qui synthétise l'ordre et la hauteur des extrema locaux de  $h$ .<sup>[2]</sup>



[2] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863> (visited on 02/04/2021)

## Diagramme de persistence d'une fonction univariée

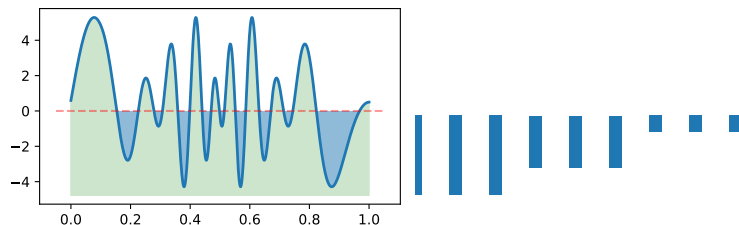
Le diagramme de persistence  $D(h)$  d'une fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est un multi-ensemble de points, qui synthétise l'ordre et la hauteur des extrema locaux de  $h$ .<sup>[2]</sup>



[2] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863> (visited on 02/04/2021)

## Diagramme de persistance d'une fonction univariée

Le diagramme de persistance  $D(h)$  d'une fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est un multi-ensemble de points, qui synthétise l'ordre et la hauteur des extrema locaux de  $h$ .<sup>[2]</sup>

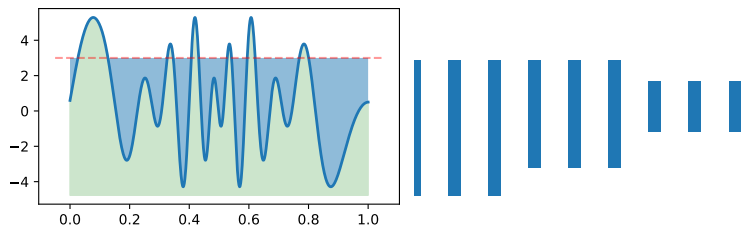


[2] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863> (visited on 02/04/2021)



## Diagramme de persistance d'une fonction univariée

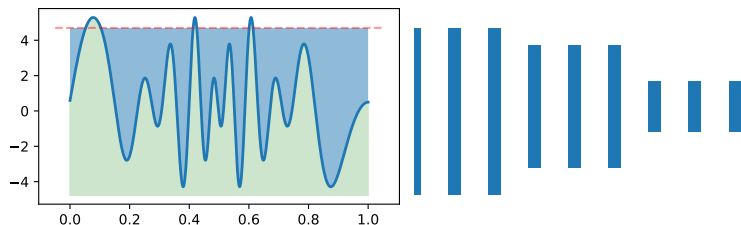
Le diagramme de persistance  $D(h)$  d'une fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est un multi-ensemble de points, qui synthétise l'ordre et la hauteur des extrema locaux de  $h$ .<sup>[2]</sup>



[2] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863> (visited on 02/04/2021)

## Diagramme de persistence d'une fonction univariée

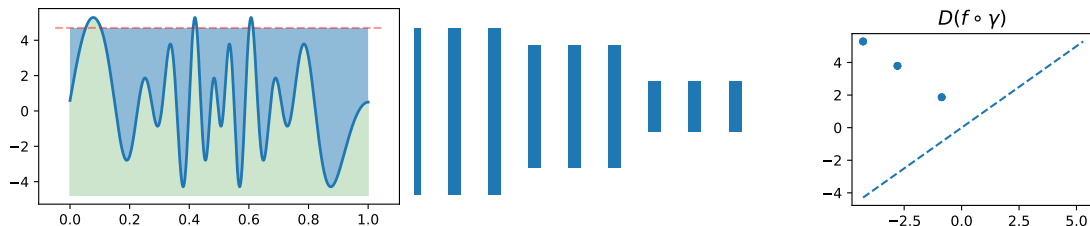
Le diagramme de persistence  $D(h)$  d'une fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est un multi-ensemble de points, qui synthétise l'ordre et la hauteur des extrema locaux de  $h$ .<sup>[2]</sup>



[2] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863> (visited on 02/04/2021)

## Diagramme de persistance d'une fonction univariée

Le diagramme de persistance  $D(h)$  d'une fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est un multi-ensemble de points, qui synthétise l'ordre et la hauteur des extrema locaux de  $h$ .<sup>[2]</sup>



On peut voir  $D(h)$  comme une mesure de comptage sur  $\Delta_+ = \{(x, y) \mid x < y\} \subset \mathbb{R}^2$ . Pour  $A \subset \Delta_+$ ,

$$D(h)(A) = |D(h) \cap A|. \quad (2)$$

[2] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863> (visited on 02/04/2021)

## Diagramme de persistance d'une fonction univariée

Le diagramme de persistance  $D(h)$  d'une fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est un multi-ensemble de points, qui synthétise l'ordre et la hauteur des extrema locaux de  $h$ .<sup>[2]</sup>



On peut voir  $D(h)$  comme une mesure de comptage sur  $\Delta_+ = \{(x, y) \mid x < y\} \subset \mathbb{R}^2$ . Pour  $A \subset \Delta_+$ ,

$$D(h)(A) = |D(h) \cap A|. \quad (2)$$

### Proposition (Invariance par reparamétrisation)

Pour toute bijection croissante  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, N]$ ,

$$D(f \circ \gamma) = D(f|_{[0, N]}). \quad (3)$$

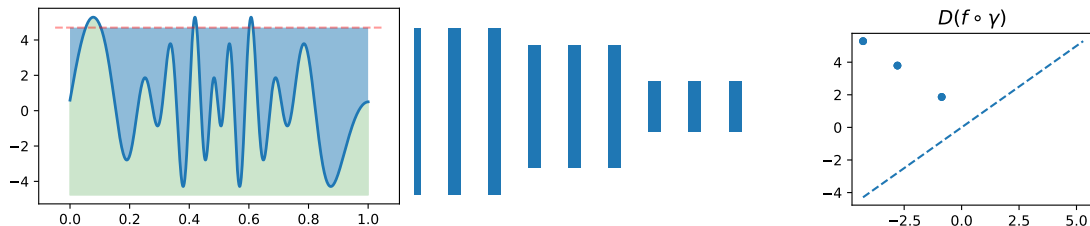
De plus, une modification de la construction permet d'obtenir

$$D(f|_{[0, N]}) = N \times D(f|_{[0, 1]}). \quad (4)$$

[2] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863> (visited on 02/04/2021)

## Diagramme de persistance d'une fonction univariée

Le diagramme de persistance  $D(h)$  d'une fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est un multi-ensemble de points, qui synthétise l'ordre et la hauteur des extrema locaux de  $h$ .<sup>[2]</sup>



On peut voir  $D(h)$  comme une mesure de comptage sur  $\Delta_+ = \{(x, y) \mid x < y\} \subset \mathbb{R}^2$ . Pour  $A \subset \Delta_+$ ,

$$D(h)(A) = |D(h) \cap A|. \quad (2)$$

### Proposition (Invariance par reparamétrisation)

Pour toute bijection croissante  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, N]$ ,

$$D(f \circ \gamma) = D(f|_{[0, N]}). \quad (3)$$

De plus, une modification de la construction permet d'obtenir

$$D(f|_{[0, N]}) = N \times D(f|_{[0, 1]}). \quad "N = \frac{D(f|_{[0, N]})}{D(f|_{[0, 1]})}" \quad (4)$$

[2] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863> (visited on 02/04/2021)

## Estimateur de $N$

On définit  $\hat{N}(h) = \gcd\{|D(h) \cap p| \mid p \in D(h)\}$ , où  $\gcd$  est le plus grand diviseur commun.

### Corollaire

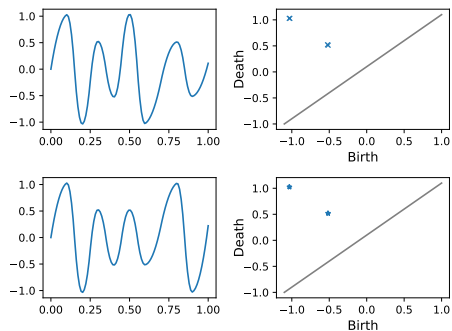
$$\hat{N}(f|_{[0,M]}) = N \times \hat{N}(f|_{[0,1]}) \quad (5)$$

### Définition

On dit que  $f$  est **non-dégénérée**, si  $\hat{N}(f|_{[0,1]}) = 1$ .

### Identifiabilité

Il existe une fonction 1-périodique  $g$ , telle que  $D(g) = \frac{D(f|_{[0,1]})}{\hat{N}(f|_{[0,1]})}$ . Par conséquent, le problème n'est pas identifiable (avec le diagramme) pour  $n \geq 2$ .



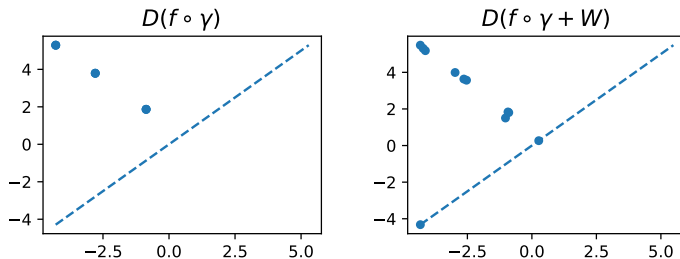
## Stabilité du diagramme

Le diagramme de persistance est stable par perturbations.<sup>[3]</sup>

### Proposition

Soit  $W : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors,

$$d_B(D(f \circ \gamma), D(f \circ \gamma + W)) \leq \|W\|_\infty. \quad (6)$$



[3] Frederic Chazal et al. (July 2012). *The structure and stability of persistence modules*. en. SpringerBriefs in Mathematics. arXiv: 1207.3674. Springer, Cham. ISBN: 978-3-319-42545-0. URL: <http://arxiv.org/abs/1207.3674> (visited on 05/18/2019)

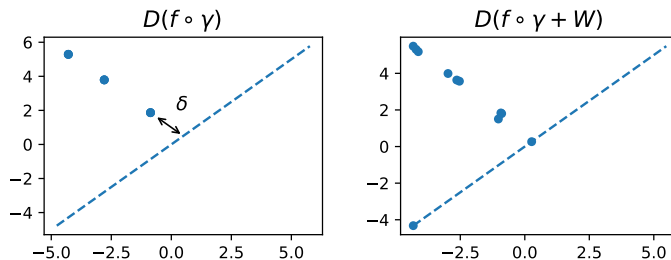
## Stabilité du diagramme

Le diagramme de persistance est stable par perturbations.<sup>[3]</sup>

### Proposition

Soit  $W : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors,

$$d_B(D(f \circ \gamma), D(f \circ \gamma + W)) \leq \|W\|_\infty. \quad (6)$$



Le paramètre de régularité  $\delta_f = \min_{p,q \in D(f)} \{d(p, q), d(p, \Delta), d(q, \Delta)\}$  quantifie les distances entre les points, ainsi qu'à la diagonale.

[3] Frederic Chazal et al. (July 2012). *The structure and stability of persistence modules*. en. SpringerBriefs in Mathematics. arXiv: 1207.3674. Springer, Cham. ISBN: 978-3-319-42545-0. URL: <http://arxiv.org/abs/1207.3674> (visited on 05/18/2019)

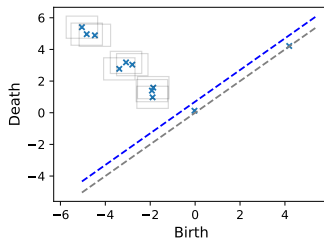


## Estimation de $N$ dans le cas bruité

En présence du bruit, on remplace les multiplicités des points par les mesures de certains voisinages.

Pour  $\tau > 0$ , on note  $\mathcal{A}_\tau$  une partition de  $D(S)$  obtenue avec du single-linkage clustering à l'échelle  $\tau$ . On définit

$$\hat{N}(S, \tau) = \gcd_{A \in \mathcal{A}_\tau | A \cap \Delta_\tau = \emptyset} \{D(S)(A)\}. \quad (7)$$



### Théorème

Supposons  $f$  non-dégénérée. Soit  $W$  une perturbation continue, telle que  $\|W\|_\infty < \epsilon$ . Alors, pour tout  $\tau \in ]2\epsilon, \delta_f/3[$ ,

$$\hat{N}(S, \tau) = N. \quad (8)$$

### Corollaire (Distribution du sup d'un processus)

Soit  $(W_t)_{t \in [0,1]}$  un processus Gaussien avec covariance  $\Gamma(t) = \sigma^2 \exp(-t^2/(2l^2))$ . Alors, pour tout  $\tau \in [0, \delta_f/3]$ , on a

$$\hat{N}(S, \tau) = N, \tag{7}$$

avec probabilité au moins  $1 - (\frac{1}{l^2\pi} \exp(-\kappa^2/2) + 2\phi(-\kappa))$ , where  $\kappa = \tau/2\sigma$  et  $\phi$  est la fonction de répartition de la loi normale.<sup>[a]</sup>

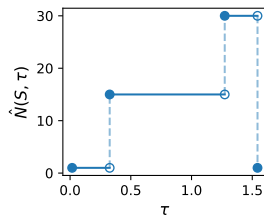
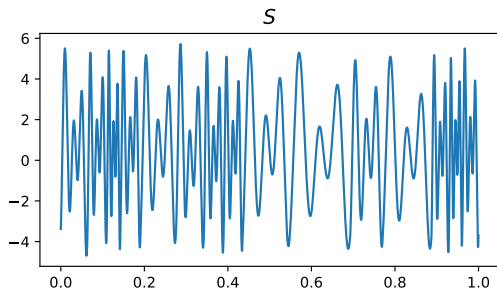
---

[a] Jean-Marc Azis and Mario Wschebor (Feb. 2009). *Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields: Azas/Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields*. en. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 978-0-470-43464-2 978-0-470-40933-6. DOI: 10.1002/9780470434642. URL: <http://doi.wiley.com/10.1002/9780470434642> (visited on 04/15/2021)

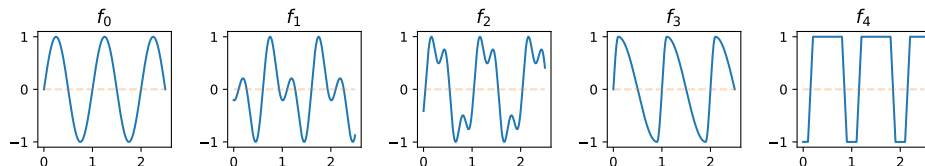
## Choix de $\tau$

La fonction  $\tau \mapsto \hat{N}(S, \tau)$  est constante par morceaux. On prend  $\tau^*$  le milieu du segment le plus long, où  $\hat{N}(S, \cdot)$  est constante et différente de 1:

$$\hat{N}_\tau(S) = \hat{N}(S, \tau^*). \quad (8)$$



On considère 5 fonctions périodiques.

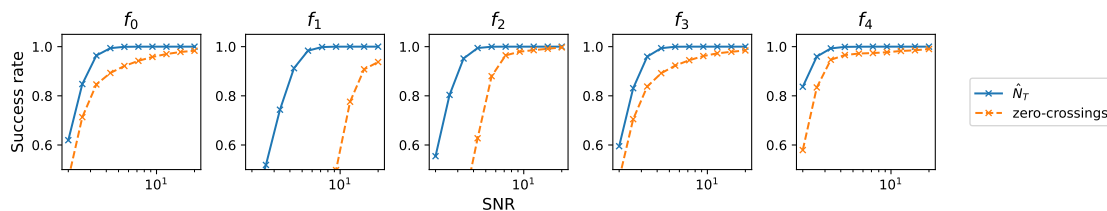


Pour obtenir  $S = f_k \circ \gamma + W$ , on génère  $\gamma$  et  $W$  aléatoires:

- On tire  $N \in \mathcal{U}(5, 50)$  et on choisit  $(t_i)_{i=1}^{N-1}$  pour les débuts des périodes. On interpole pour obtenir  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, N]$ .
- $W$  est un processus Gaussien avec moyenne 0 et covariance  $\Gamma(t) = \sigma^2 \exp(-t^2/(2l^2))$ .

Pour chaque  $(\gamma, \sigma, l)$ , on simule 50 réalisations indépendantes de  $W$ .

On compare la méthode  $\hat{N}_T$  avec  $\hat{N}_\alpha$  (zero-crossings avec  $k$  spécifié).



## Limitations

L'estimateur  $\hat{N}_T$

- 1 Le gcd n'est pas stable par rapport aux petites perturbations,
- 2 La méthode ne s'applique qu'à  $\gamma(1) \in \mathbb{N}$ ,

## Perspectives

- 1 Intégrer les algorithmes de gcd approximatif.
- 2 Obtenir des garanties pour  $\hat{N}_T$ .

Les travaux présentés ici sont une partie d'une méthode d'estimation de phase  $\gamma$ .<sup>[4]</sup>

[4] Thomas Bonis et al. (May 2022). *Topological phase estimation method for reparameterized periodic functions*. Number: arXiv:2205.14390 arXiv:2205.14390 [cs, eess, math]. DOI: 10.48550/arXiv.2205.14390. URL: <http://arxiv.org/abs/2205.14390> (visited on 06/14/2022)

- Azis, Jean-Marc and Mario Wschebor (Feb. 2009). *Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields: Azas/Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields*. en. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 978-0-470-43464-2 978-0-470-40933-6. DOI: 10.1002/9780470434642. URL: <http://doi.wiley.com/10.1002/9780470434642> (visited on 04/15/2021).
- Boashash, Boualem, Peter O'Shea, and Morgan Arnold (Nov. 1990). "Algorithms for instantaneous frequency estimation: a comparative study". In: *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering* 1348. DOI: 10.1117/12.23471.
- Boissonnat, Jean-Daniel, Frédéric Chazal, and Mariette Yvinec (2018). *Geometric and Topological Inference*. en. Cambridge University Press. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01615863> (visited on 02/04/2021).
- Bonis, Thomas et al. (May 2022). *Topological phase estimation method for reparameterized periodic functions*. Number: arXiv:2205.14390 arXiv:2205.14390 [cs, eess, math]. DOI: 10.48550/arXiv.2205.14390. URL: <http://arxiv.org/abs/2205.14390> (visited on 06/14/2022).
- Chazal, Frédéric et al. (July 2012). *The structure and stability of persistence modules*. en. SpringerBriefs in Mathematics. arXiv: 1207.3674. Springer, Cham. ISBN: 978-3-319-42545-0. URL: <http://arxiv.org/abs/1207.3674> (visited on 05/18/2019).

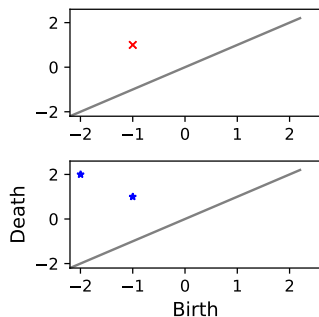
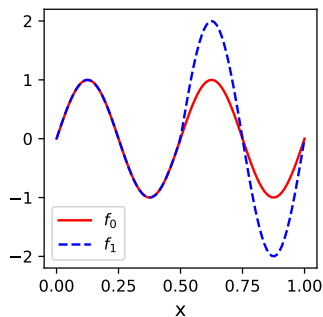
Questions?

Le paramètre de régularité  $\delta_f = \min_{p,q \in D(f)} \{d(p, q), d(p, \Delta), d(q, \Delta)\}$  quantifie les distances entre les points, ainsi qu'à la diagonale.

### Proposition

Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions 1-périodiques. Si  $f$  est non-dégénérée, de régularité  $\delta_f$  et  $g$  est dégénérée, alors

$$d_B(D(f|_{[0,1]}), D(g|_{[0,1]})) \geq \frac{\delta}{2}. \quad (9)$$





# Méthode d'odométrie topologique

